



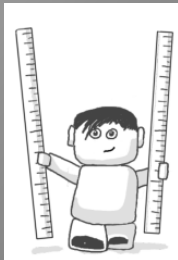
Tema 2. Teoría de probabilidades. 2/4

Curso 2024-25

Facultad de Física

Técnicas Experimentales II

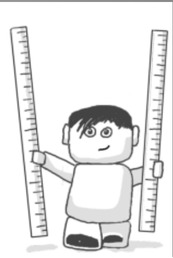
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Objetivos tema:

- **Variable aleatoria discreta y continua. Función de probabilidad, densidad de probabilidad y distribución de probabilidad.**
- **Valor esperado de una variable aleatoria.**
- **Medidas características de una variable aleatoria. Media y varianza. Variable tipificada.**
- **Momentos de una distribución de probabilidad.**
- **Función generatriz de momentos.**
- **Distribuciones de probabilidad más relevantes.**

USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA



Variable aleatoria

- **Denominamos espacio de probabilidad a la terna $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{p})$ donde:**
  - **$\boldsymbol{\Omega}$ es el espacio muestral que contiene todos los sucesos elementales**
  - **$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es la llamada $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de todos los sucesos posibles**
  - **$\boldsymbol{p}$ es la probabilidad de cada suceso**

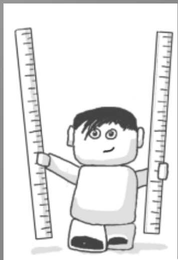
Una variable aleatoria es una función definida sobre el espacio de probabilidad de forma que:

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, p) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$$

Donde $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}$ y P_X es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que asigna probabilidad a un intervalo real.

$$P_X(\mathcal{B}) = p(X^{-1}(\mathcal{B}))$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Variable aleatoria

- **De modo resumido diremos que una variable aleatoria unidimensional se construye mediante la asignación de un número real a cada suceso del experimento aleatorio**

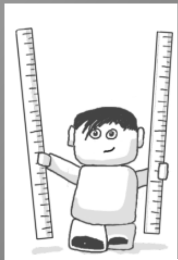
$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \hookrightarrow & X(A) \end{array}$$

- **Decimos que una variable aleatoria es *continua*, si su imagen está formada por uno o varios intervalos de la recta real.**
- **Decimos que una variable aleatoria es *discreta*, si su imagen está formada por conjunto numerable de la recta real.**

 $\to 1$  $\to 0$

O bien !!

 $\to 2$  $\to -3$



Variable aleatoria discreta: función de probabilidad

- **Para una variable aleatoria discreta, cuyo espacio muestral está formado por los sucesos** $\boldsymbol{\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}}$**, designamos como función de probabilidad a aquella función que asigna a cada suceso elemental un número en el intervalo [0,1] (*)**

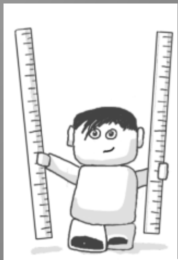
$$\begin{array}{c} p : X(\Omega) \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R} \\ x_i \hookrightarrow p(x_i) \end{array}$$

Notaremos $p(x_i)$ **a la probabilidad de que la variable aleatoria** X **cumpla** $X = x_i$

$$p(x_i) = p(X = x_i)$$

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} p(x_i) = 1$$

(*) Por extensión podremos definir esa función sobre $\mathcal{A}$
Usaremos una notación laxa identificando la función de la variable aleatoria



Variable aleatoria discreta: función de distribución de probabilidad

- **La función de distribución de probabilidad $F(x)$ se define como**

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R} \\ x_0 &\hookrightarrow \ F(x_0) = p(X \leq x_0) \end{aligned}$$

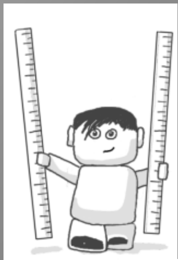
Por lo tanto se cumplen las propiedades:

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Para una variable con valores finitos y ordenados

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$$

$$\begin{aligned} F(x_1) &= p(x_1) \\ F(x_2) &= p(x_1) + p(x_2) \\ &\vdots \\ F(x_n) &= \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1 \end{aligned}$$

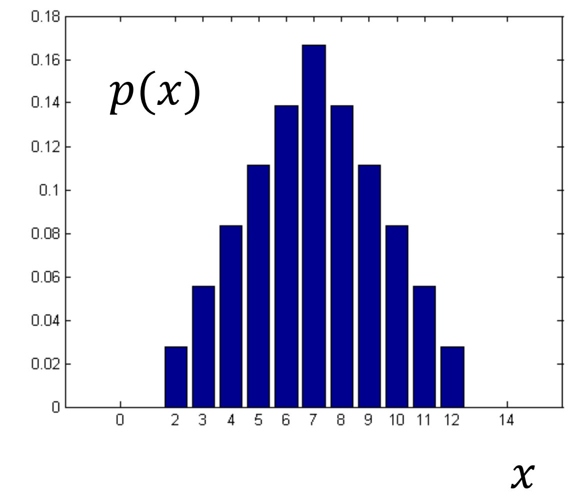


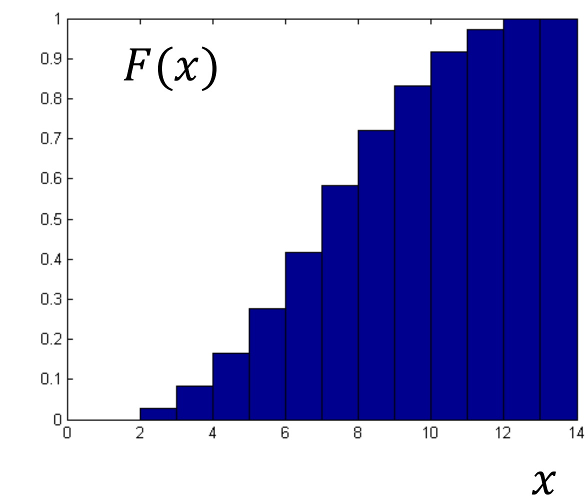
Variable aleatoria discreta

- **Consideremos el espacio muestral asociado a tirar dos dados:**

La variable aleatoria será la suma de los puntos de ambos dados:

X		p(x)	F(x)
2	1+1	1/36	1/36
3	1+2/2+1	2/36	3/36
4	1+3/2+2/3+1	3/36	6/36
5	1+4/2+3/3+2/4+1	4/36	10/36
6	1+5/2+4/3+3/4+2/5+1	5/36	15/36
7	1+6/2+5/3+4/4+3/5+2/6+1	6/36	21/36
8	2+6/3+5/4+4/5+3/6+2	5/36	26/36
9	3+6/4+5/5+4/6+3	4/36	30/36
10	4+6/5+5/6+4	3/36	33/36
11	5+6/6+5	2/36	35/36
12	6+6	1/36	1





Variable aleatoria continua

- **Consideremos una variable que toma valores en $\mathbb{R}$. Consideremos la probabilidad p de obtener un valor de la variable aleatoria en el intervalo $[\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{\Delta}]$**

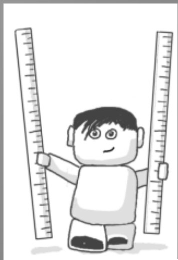
$$\lim_{\Delta\to 0} p(x_0 \leq x \leq \ x_0 + \Delta) = 0$$

- **Si el comportamiento de la probabilidad es lo bastante suave entorno al valor $\boldsymbol{x_0}$ consideraremos que existe el límite**

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{p(x_0 \leq x \leq \ x_0 + \Delta)}{\Delta} = f(x_0)$$

- **A esta función la denominamos función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria.**

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Variable aleatoria continua: función densidad de probabilidad

- **La función densidad de probabilidad está definida como:**

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x_0 &\hookrightarrow f(x_0)
\end{aligned}
$$

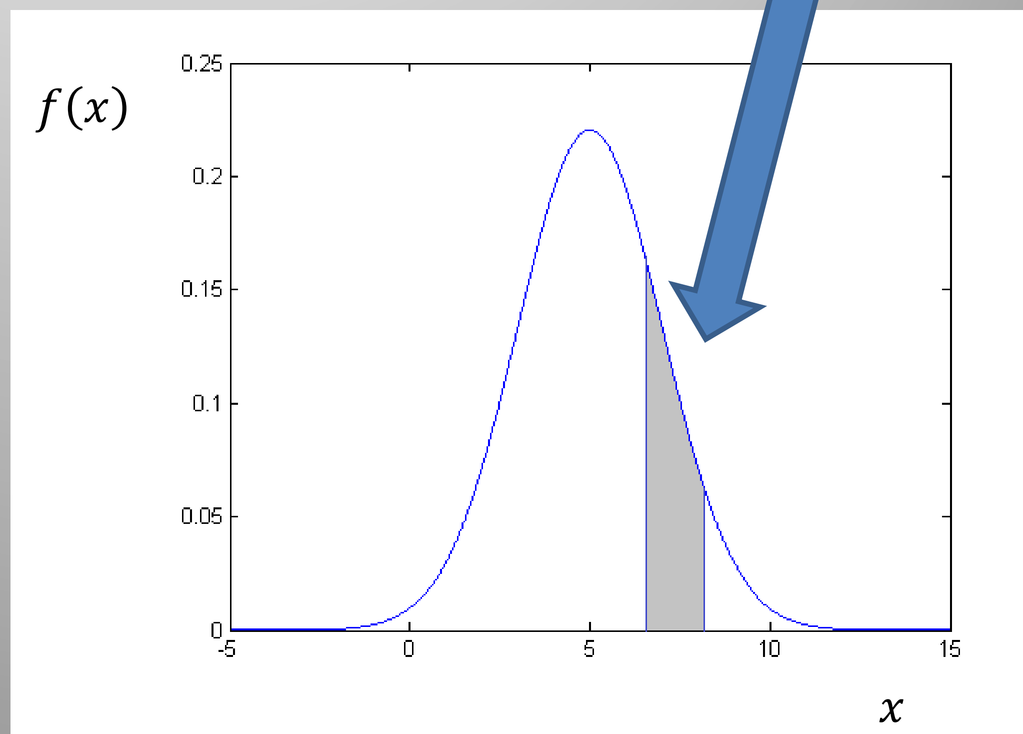
- **Con las siguientes propiedades:**

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_a^b f(x)dx = p(a \leq x \leq b)$$

$p(a \leq x \leq b)$ es igual al área bajo la curva



USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Variable aleatoria continua: función distribución de probabilidad

- **La función distribución de probabilidad está definida como:**

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_0 &\hookrightarrow F(x_0) \end{aligned}$$

$$F(x_0) = p(x \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$$

- **Con las siguientes propiedades:**

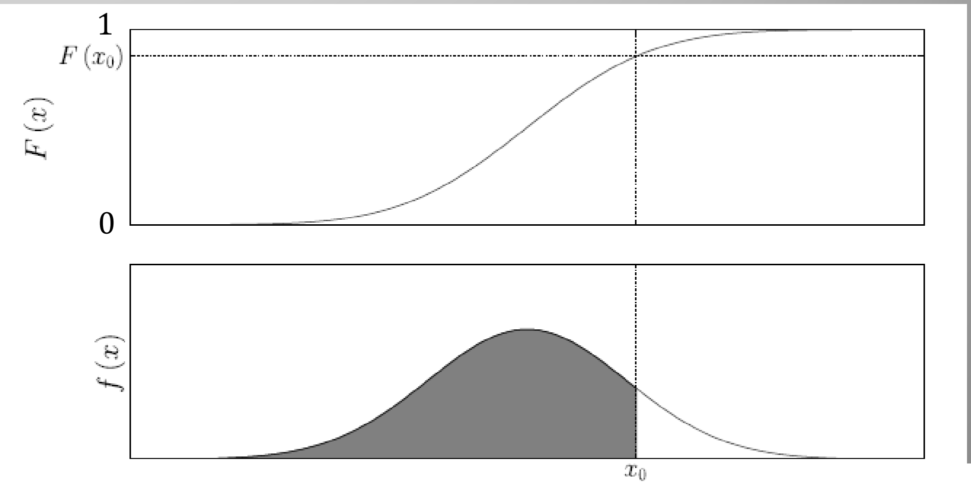
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

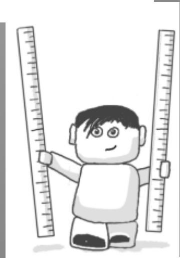
$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$F(x_1) \leq F(x_2) \quad si \;\; x_1 \leq x_2$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$$p(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$



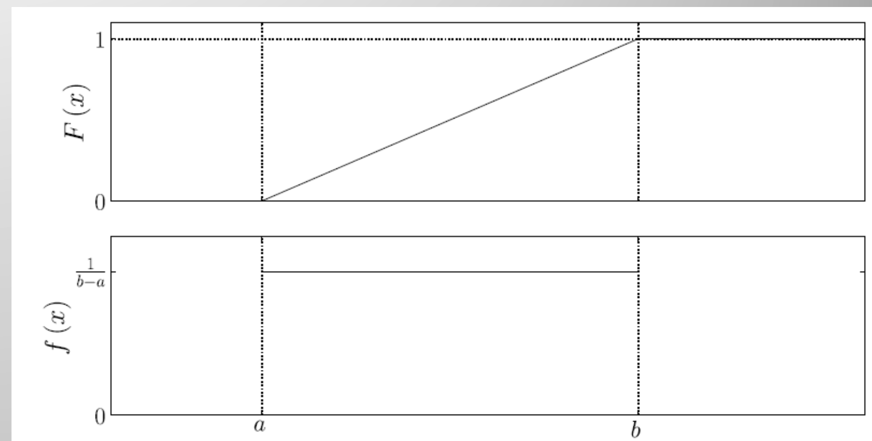


USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Variable aleatoria continua: distribución uniforme

$$f(x) = \begin{cases} k & a \le x \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Densidad de probabilidad constante entre a y b



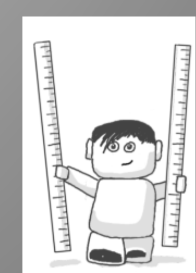
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b k\,dx = k\,(b-a)$$

$$\Longrightarrow \quad k = \frac{1}{b-a}$$

La función de distribución de probabilidad para $a \le x \le b$ viene dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{x-a}{b-a}$$

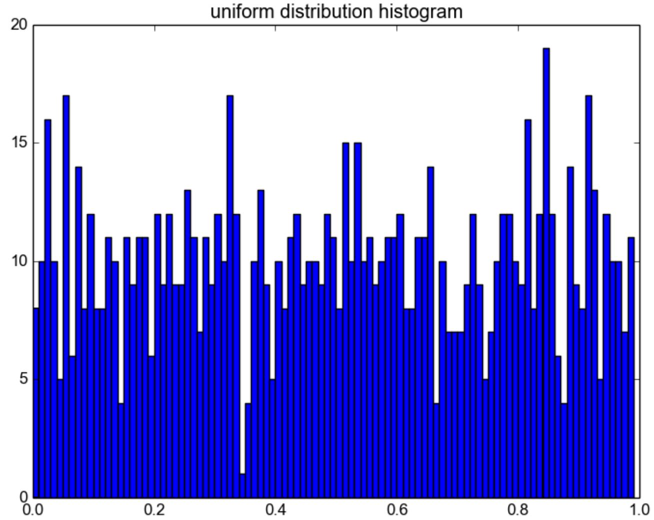
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b < x \end{cases}$$



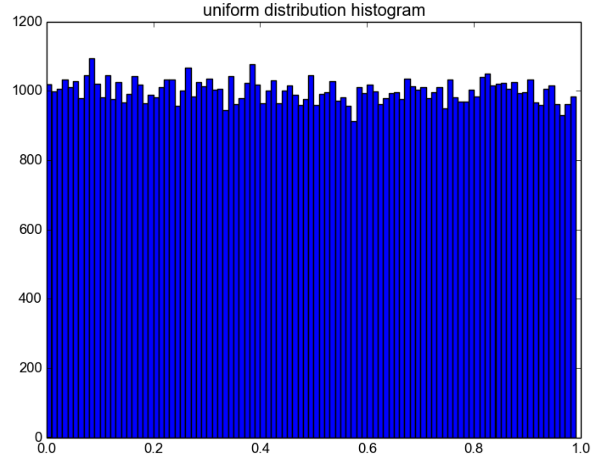
Generando números aleatorios en python

Distribución uniforme entre 0 y 1

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
x=np.random.uniform(size=1000)
bins=np.arange(0,1,0.01)
plt.hist(x,bins)
plt.title(“uniform distribution histogram”)
plt.show()
```



1000



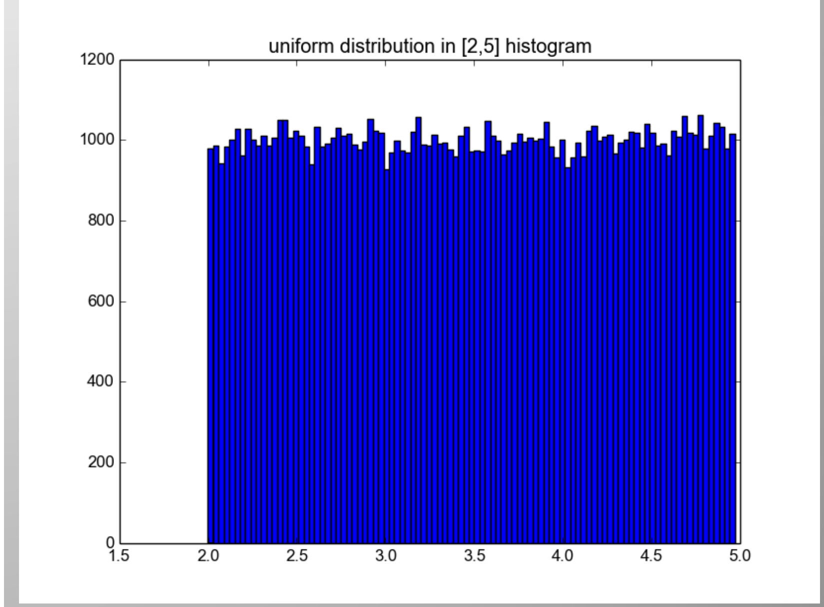
100 000

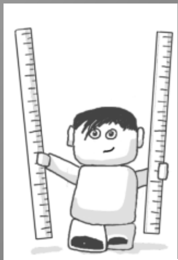
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Distribución uniforme en python

Distribución uniforme entre a y b

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
a=2
b=5
x=np.random.uniform(size=100000)
y= a+(b-a)*x
bins=np.arange(a,b,(b-a)*0.01)
plt.hist(y,bins)
plt.title(“uniform distribution in [2,5] histogram”)
plt.show()
```





Normalización de una distribución continua

Como ejemplo, consideremos una distribución de probabilidad definida como:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} k\,x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}}$$

El factor k debe cumplir que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

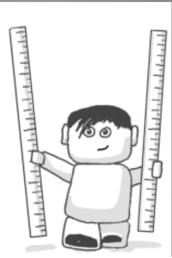
Por lo tanto:

$$1 = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 k\,x^2\,dx = k\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0}{3}\right]$$

$$1 = k\,\frac{8}{3}$$

$$k = \frac{3}{8}$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Variable aleatoria continua: distribución exponencial

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,0)\\ ke^{-\beta x} & x\in[0,+\infty)\end{cases}$$

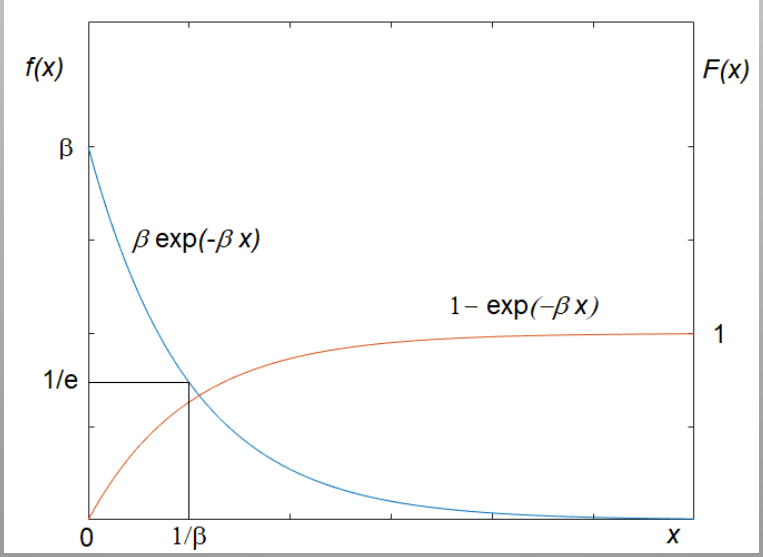
Densidad de probabilidad que decrece exponencialmente desde $x=0;\ \beta>0$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} k\,e^{-\beta x}\,dx=k\left[-\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right]_0^{+\infty}=\frac{k}{\beta}$$

$$\Longrightarrow\ k=\beta$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du=\int_{0}^{x}\beta\,e^{-\beta u}\,du=\beta\left[-\frac{1}{\beta}e^{-\beta u}\right]_0^{x}=1-e^{-\beta x};\qquad x\geq 0$$

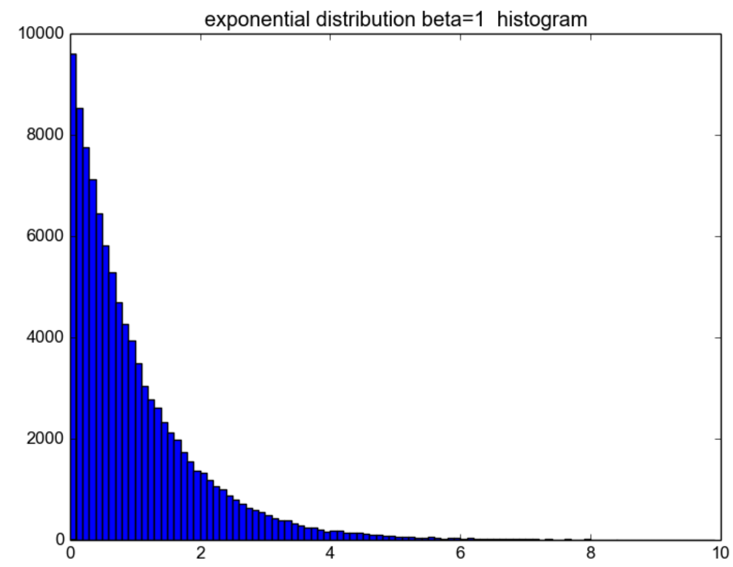
$$F(x)=0;\ x<0$$



Distribución exponencial en python

Distribución exponencial $\boldsymbol{\beta = 1/\mathrm{scale}}$

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
x=np.random.exponential(scale=1, size=100000)
bins=np.arange(0,10,0.1)
plt.hist(x,bins)
plt.title("exponential distribution beta=1 histogram")
plt.show()
```



USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Variable aleatoria: valor esperado o esperanza matemática

Dada una variable aleatoria definimos la esperanza matemática o valor esperado de la misma como:

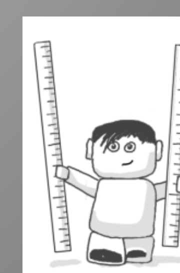
Variable discreta $\mathbb{E}\{X\} = \sum_i p(x_i)\, x_i$

Variable continua $\mathbb{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, x\, dx$

$$\mathbb{E}\{X\} = 2\frac{1}{36} + 3\frac{2}{36} + 4\frac{3}{36} + 5\frac{4}{36} + 6\frac{5}{36} + 7\frac{6}{36} + 8\frac{5}{36} + 9\frac{4}{36} + 10\frac{3}{36} + 11\frac{2}{36} + 12\frac{1}{36} = 7$$

$$f(x) = \begin{cases} {}^{1}/_{(b-a)} & a \le x \le b \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, x\, dx = \frac{a+b}{2}$$



Variable aleatoria:
valor esperado o esperanza matemática

Igualmente podemos definir el valor esperado para cualquier función de la variable aleatoria *H(X)*

Variable discreta $\mathbb{E}\{H(X)\} = \sum_i p(x_i)\, H(x_i)$

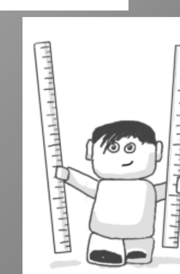
Variable continua $\mathbb{E}\{H(X)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, H(x)\, dx$

$$\mathbb{E}\{X^2\} = 4\frac{1}{36} + 9\frac{2}{36} + 16\frac{3}{36} + 25\frac{4}{36} + 36\frac{5}{36} + 49\frac{6}{36} + 64\frac{5}{36} + 81\frac{4}{36} + 100\frac{3}{36} + 121\frac{2}{36} + 144\frac{1}{36} = 54{,}8$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \le x \le b \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\{X^2\} = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Variable aleatoria: valor esperado o esperanza matemática

El valor esperado actúa como un operador lineal sobre la variable aleatoria. Supongamos dos funciones de la variable aleatoria *H(X)* y *G(X)*.

$$\mathbb{E}\{\alpha\, H(X) + \beta\, G(X)\} = \alpha\, \mathbb{E}\{H(X)\} + \beta\, \mathbb{E}\{G(X)\}$$

Con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

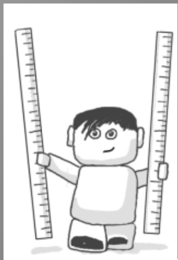
Fácil de demostrar a partir de la definición de valor esperado.

Ejemplo:

$$\mathbb{E}\{(x - x_0)^2\} = \mathbb{E}\{x^2 - 2\, x\, x_0 + x_0{}^2\} = \mathbb{E}\{x^2\} - 2\, x_0 \mathbb{E}\{x\} + x_0{}^2$$

En particular :

$$\mathbb{E}\{(x - \mathbb{E}\{x\})^2\} = \mathbb{E}\{x^2\} - (\mathbb{E}\{x\})^2$$



Medidas de centralización

Definimos como media μ de una variable aleatoria X a su valor esperado , esta media se denomina <u>media μ de la población</u> obtenida a partir de la distribución de probabilidad.

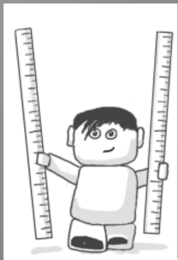
$$\mu = \mathbb{E}\{X\}$$

Variable discreta:

$$\mu = \sum_{i \epsilon X(\Omega)} p(x_i)\, x_i$$

Variable continua:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$$



Medidas de centralización

La mediana *Me* es aquel valor de la recta real tal que la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores inferiores o iguales a él es 0,5.

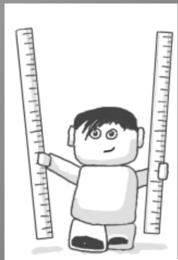
$$F(Me) = 0{,}5 = p(x \leq Me)$$

La moda *Md* es el valor más probable de la variable aleatroia

$$p(x) \leq p(Md) \qquad \forall x \epsilon X(\Omega)$$

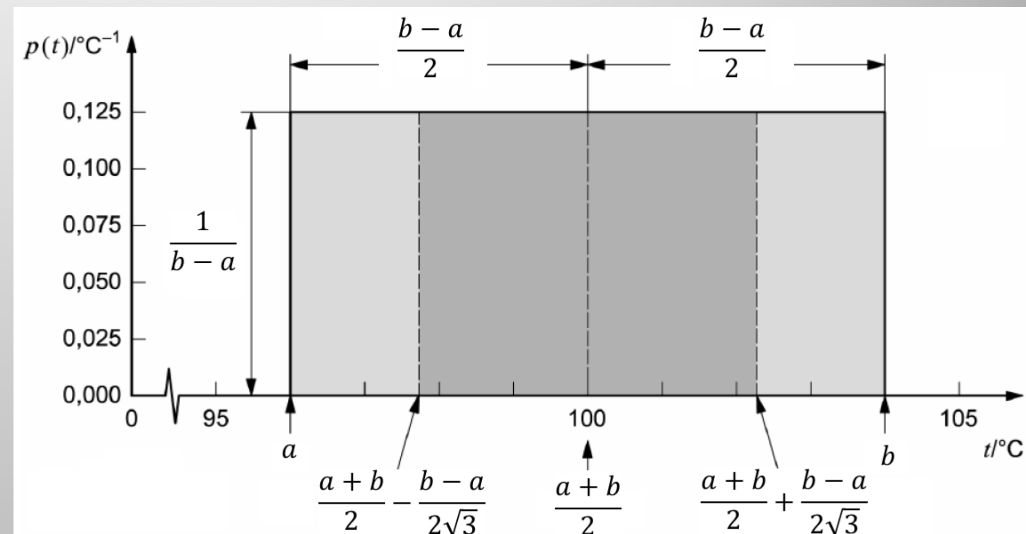
En el caso de la variable continua, si la densidad de probabilidad es analítica en $\mathbb{R}$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=Md} = 0 \qquad\qquad \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=Md} < 0; \quad \text{n par}$$



Variable aleatoria uniforme

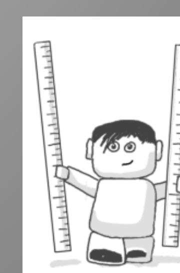
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



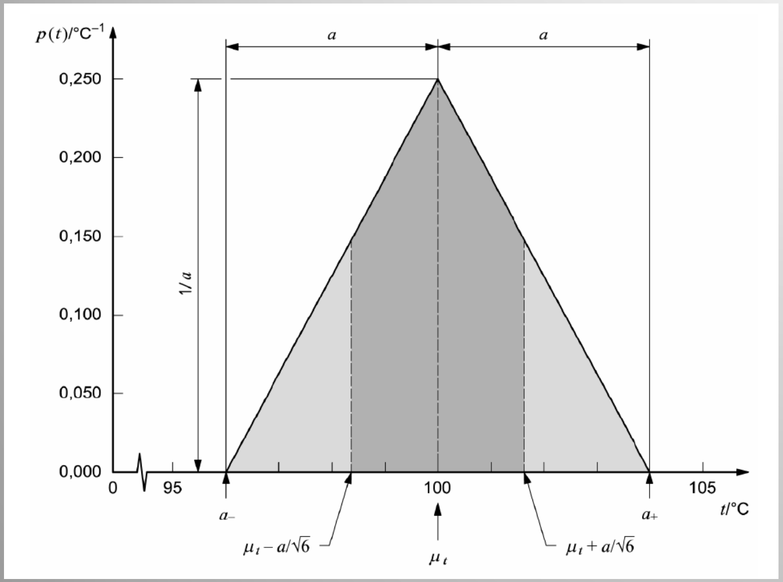
Densidad de probabilidad constante entre a y b.

$$\mu = \mathbb{E}\{X\} = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, x\, dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Distribución de probabilidad triangular



$$f(x) = \begin{cases} f_0\,(x-(b-a)) & b-a \le x \le b \\ f_0\,(b+a-x) & b < x < b+a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

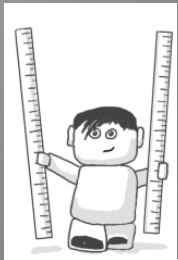
$$\int_{b-a}^{b} f_0(x-b+a)\,dx + \int_{b}^{b+a} f_0(b+a-x)\,dx = 1$$

$$f_0 = \frac{1}{a^2}$$

En este caso tendremos que

$$Md = Me = b$$

$$\mathbb{E}\{X\} = \int_{b-a}^{b} \frac{1}{a^2}(x-b+a)\,x\,dx + \int_{b}^{b+a} \frac{1}{a^2}(b+a-x)\,x\,dx = b$$



UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Medidas de dispersión

La varianza σ^2 de una variable aleatoria X se define como :

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\{(X - \mathbb{E}\{X\})^2\} = \mathbb{E}\{(X - \mu)^2\}$$

La desviación típica σ es la raíz cuadrada positiva de la varianza

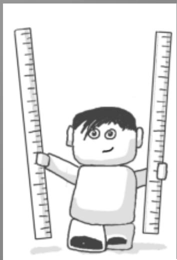
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mathbb{E}\{(X - \mu)^2\}}$$

En el caso de la variable aleatoria discreta

$$\sigma^2 = \sum_{i \in X(\Omega)} p(x_i)(x_i - \mu)^2$$

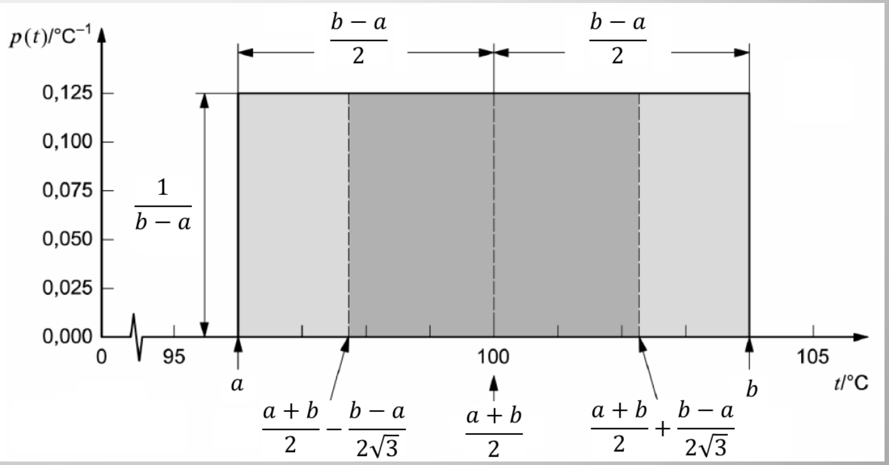
En el caso de la variable aleatoria continua

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(x - \mu)^2\,dx$$



Distribución de probabilidad uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ {}^{1}/_{(b-a)} & a \le x \le b \\ 0 & b < x \end{cases}$$



$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

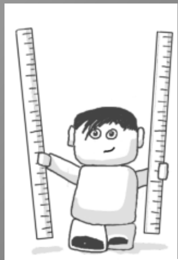
$$\sigma^2 = \mathbb{E}\{x^2\} - \mu^2 = \mathbb{E}\{x^2\} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

En este caso tendremos que

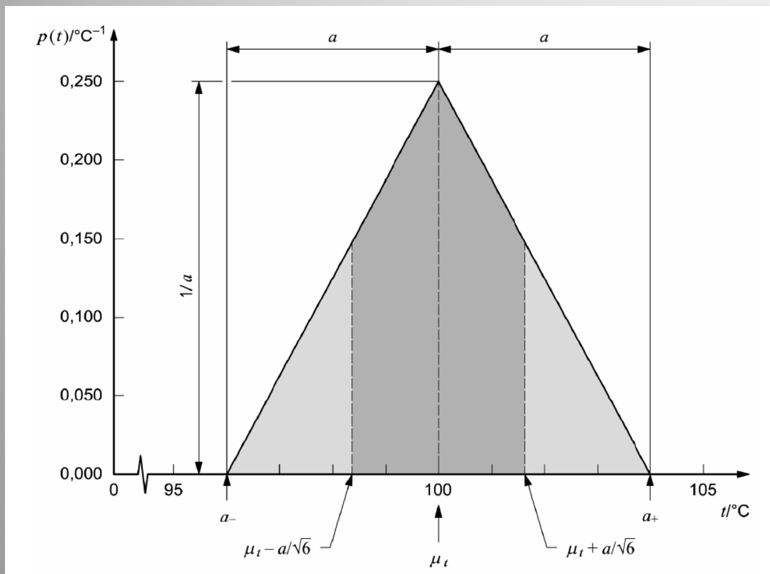
$$\sigma^2 = \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}\right)(b^3 - a^3) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Distribución de probabilidad triangular



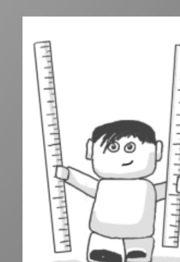
$$f(x) = \frac{1}{a^2}\begin{cases} (x-b+a) & b-a \le x \le b \\ (b+a-x) & b < x < b+a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\mu = b$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\{x^2\} - b^2$$

En este caso tendremos que

$$\sigma^2 = \int_{b-a}^{b} \frac{1}{a^2}(x-b+a)\, x^2\, dx + \int_{b}^{b+a} \frac{1}{a^2}(b+a-x)\, x^2\, dx - b^2 = \frac{1}{6}a^2$$



Distribución de probabilidad exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0] \\ \beta e^{-\beta x} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Densidad de probabilidad que decrece exponencialmente desde $x = 0$; $\beta > 0$

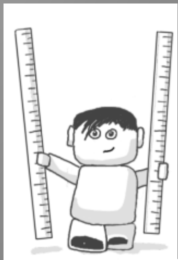
En este caso podremos calcular el valor esperado de la variable y su varianza.

$$\mathbb{E}\{x\} = \int_0^{+\infty} x\, \beta\, e^{-\beta x}\, dx = 1/\beta$$

$$\mathbb{E}\{x^2\} = \int_0^{+\infty} x^2\, \beta\, e^{-\beta x}\, dx = \frac{2}{\beta^2}$$

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\{x^2\} - \mu^2 = \mathbb{E}\{x^2\} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

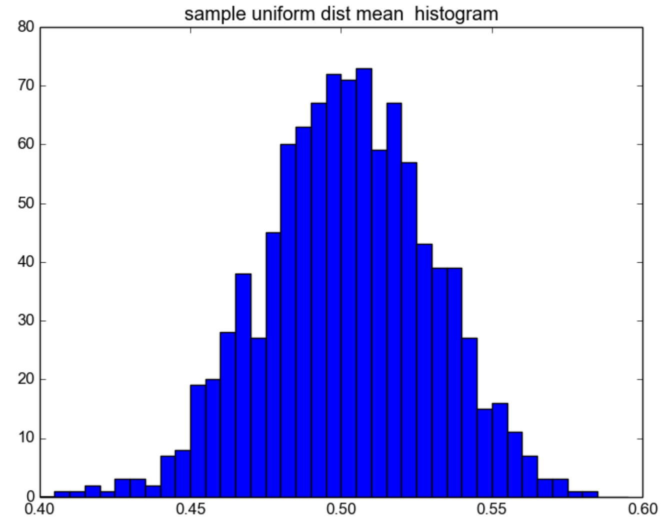
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

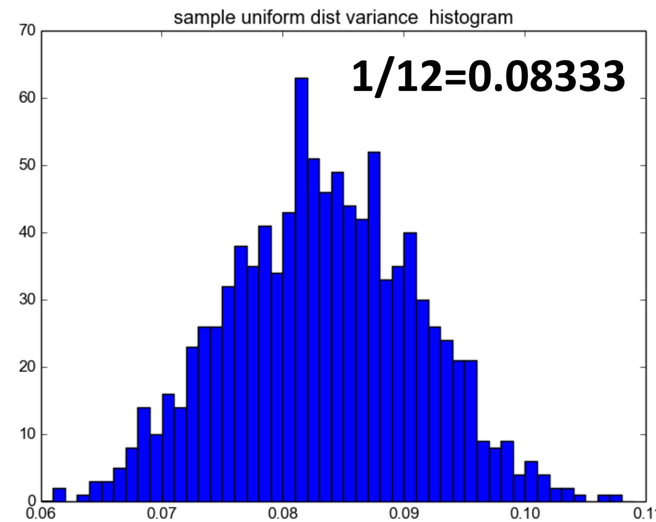


Medidas de centralización y dispersión en python

Distribución uniforme entre 0 y 1

```
import numpy as np
import statistics as st
from matplotlib import pyplot as plt
media=[]
varianza=[]
for i in range(1000):
    x=np.random.uniform(size=100)
    media.append(st.mean(x))
    varianza.append(st.variance(x))
```





Variable aleatoria tipificada o estandarizada

Si tenemos una variable aleatoria X con media μ y desviación típica σ, podremos definir a partir de ésta una nueva variable aleatoria Y con media 0 y desviación típica 1. Esta nueva variable se denomina variable tipificada.

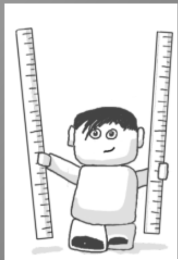
$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$\mathbb{E}\{Y\} = \mathbb{E}\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}\{X-\mu\} = \frac{1}{\sigma}[\mathbb{E}\{X\}-\mu] = 0$$

$$\sigma^2(Y) = \mathbb{E}\{(Y-\mathbb{E}\{Y\})^2\} = \mathbb{E}\{Y^2\} = \mathbb{E}\left\{\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right]^2\right\} = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}\{(X-\mu)^2\} = 1$$

Utilizaremos variables tipificadas para tabular los valores de ciertas distribuciones de probabilidad como la distribución normal.

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Momentos de la distribución de probabilidad

Los momentos de orden *j* de una distribución de probabilidad respecto al punto o valor *c* de la variable aleatoria son:

$$M_j(c) = \mathbb{E}\left\{(X - c)^j\right\}$$

En el caso particular de tomar *c=0* hablamos de momentos respecto al origen y cuando *c=μ* hablamos de momentos respecto a la media.

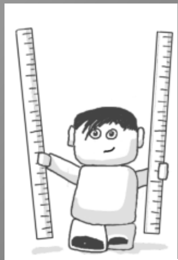
En el caso de la variable aleatoria discreta

$$M_j(c) = \sum_{i \in X(\Omega)} p(x_i)(x_i - c)^j$$

En el caso de la variable aleatoria continua

$$M_j(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(x - c)^j\,dx$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Función generatriz de momentos

En algunos casos resulta más fácil analizar las propiedades de una función de distribución de probabilidad usando las técnicas del análisis matemático mediante la función generatriz de momentos:

$$\mathcal{M}_{X-c}(t) = \mathbb{E}\left\{e^{t(X-c)}\right\}$$

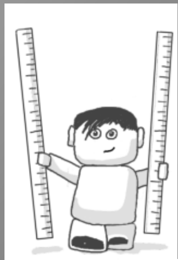
En el caso de la variable aleatoria discreta

$$\mathcal{M}_{X-c}(t) = \sum_{i \in X(\Omega)} p(x_i) e^{t\,(x_i - c)}$$

En el caso de la variable aleatoria continua

$$\mathcal{M}_{X-c}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{t\,(x-c)}\, dx$$

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Función generatriz de momentos

Podemos entonces obtener los momentos de la distribución de probabilidad a través de las herramientas del análisis:

$$M_r(c) = \left.\frac{d^r \mathcal{M}_{X-c}(t)}{dt^r}\right|_{t=0}$$

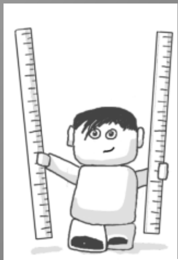
De esta forma obtenemos alternativamente, por ejemplo,

$$\mu = \left.\frac{d^1 \mathcal{M}_X(t)}{dt^1}\right|_{t=0}$$

$$\sigma^2 = \left.\frac{d^2 \mathcal{M}_{X-\mu}(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$$

N.B. Para poder aplicar este método, la función generatriz de momentos debe ser continua y diferenciable en t=0.

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Distribución exponencial

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \epsilon (-\infty, 0) \\ \beta\, e^{-\beta x} & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

Podemos obtener la función generatriz de los momentos para esta distribución

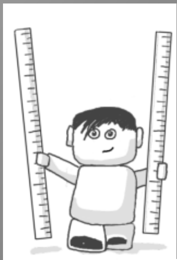
$$\mathcal{M}_X(t) = \int_0^{+\infty} \beta\, e^{-\beta\, x}\, e^{t\, x}\, dx = \int_0^{+\infty} \beta\, e^{(t-\beta)\, x}\, dx \; = \; \frac{\beta}{\beta - t} \qquad 0 < t < \beta$$

$$\mu = \left. \frac{d^1 \mathcal{M}_X(t)}{dt^1} \right|_{t=0} \qquad \frac{d^1 \mathcal{M}_X(t)}{dt^1} = \frac{\beta}{(\beta - t)^2} \qquad \mu = \frac{1}{\beta}$$

$$\sigma^2 = \left. \frac{d^2 \mathcal{M}_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} - \mu^2 \qquad \frac{d^2 \mathcal{M}_X(t)}{dt^2} = \frac{2\, \beta}{(\beta - t)^3} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\beta^2}$$

Y además podemos calcular fácilmente todos los momentos

$$\frac{d^r \mathcal{M}_X(t)}{dt^r} = \frac{r!\; \beta}{(\beta - t)^{r+1}} \qquad M_r(0) = \frac{r!}{\beta^r}$$



Bibliografía:

Capítulo 3. “Probabilidad y estadística” George C. Canavos, Ed. Mc Graw-Hill

Capítulo 4. “Fundamentos de estadística” Daniel Peña, Alianza Editorial

Capítulo 2. “Tratamiento de datos físicos” Faustino Gómez, Luis M Varela, USC

Capítulo 3. “Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers” Siegmund Brandt, Springer